Czechoslovak Mathematical Journal, 58 (133) (2008), 173–181

THE EXACTNESS OF THE PROJECTIVE LIMIT FUNCTOR ON THE CATEGORY OF QUOTIENTS OF FRECHET SPACES

Belmesnaoui Aqzzouz, Kénitra

(Reçu January 29, 2006)

Abstract. We give conditions under which the functor projective limit is exact on the category of quotients of Fréchet spaces of L. Waelbroeck [18].

Keywords: quotient d'espaces de Fréchet, limite projective

MSC 2000: 46M05, 46M15, 46M40

1. Introductions et notations

On sait que les catégories abéliennes sont utiles en Analyse fonctionnelle. Motivé par des considérations liées au calcul fonctionnel holomorphe, L. Waelbroeck a introduit la catégorie des quotients banachiques [16] et la catégorie des quotients bornologiques [17]. Plus tard, L. Waelbroeck [18], a défini la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet **qFré**. Sa technique de construction utilise le théorème du graphe fermé. Ensuite, F. Vasilescu [13], a utilisé ce qu'il appelle le graphe relevé pour définir une nouvelle catégorie équivalente à celle de L. Waelbroeck et y a développé une théorie spectrale [14]. Récemment, nous avons construit une nouvelle catégorie abélienne dont les objets sont les quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{F}$ et nous avons montré qu'elle est abélienne [1]. Ce qui répondait à une question posée par Waelbroeck dans [19].

D'autre part, le Lemme de Mittag-Leffler est un résultat classique pour lequel beaucoup de Mathématiciens sont familiers depuis au moins 50 ans. Il porte ce nom parce que sa démonstration ressemble à celle du résultat classique appelé Théorème de Mittag-Leffler sur l'existence de fonctions méromorphes ([20], 3.4.1, page 50) (pour une démonstration de ce dernière résultat on peux consulter N. Bourbaki, Topologie Générale). Ce résultat abstrait joue aussi un rôle centrale dans la théorie de Palamodov [8] et [10] i.e. concernant les foncteurs Proj_1 et Ext_1 dans la catégorie des espaces localement convexes et spécialement les espaces de Fréchet et les limites projectives des espaces DF.

Rappelons que Palamodov a devellopé sa théorie dans l'ordre de donner une démonstration à ce que Ehrenpreis appelle 'Le principe fondamental' pour le système des équations aux dérivées partielles [5]. La démonstration de Ehrenpreis est différente, elle utilise l'analyse de Fourier et on peut la trouver dans le livre de Ehrenpreis [5]. Ensuite, la théorie de Palamodov a été simplifiée et réécrite dans une nouvelle version qui est facile à comprendre par les gens de l'analyse fonctionnelle par D. Vogt [15] voir aussi J. Wengenroth ([20], Section 3.2).

Le plus important dans cette théorie c'est d'annuler le foncteur Proj_1. Dans son livre ([20], chapitre 3, Section 3.4) Jochen Wengenroth a donné la relation entre la procédure de Mittag-Leffler et la théorie de Palamodov [1] , [2] sur le foncteur Proj_1, en montrant que l'annulation de Proj_1 est donnée par la procédure de Mittag-Leffler ([20], Théorème 3.2.1).

Quelques applications aux équations aux dérivées partielles ont été données par Palamodov. En effet, dans [9], [11] et [12] il a établi des conditions nécessaires et suffisantes pour que des suites exactes d'équations aux dérivées partielle, en termes de la propriété de Pfragmen-Lindelof, soient éclissées (i.e. splint en anglais). Notons ici que Jochen Wengenroth a expliqué dans [20] l'application de la théorie du foncteur Proj_1 à celle des équations aux dérivées partielles. Il a montré la surjectivité de quelques opérateurs qui aident à annuler le foncteur Proj_1 sur le noyau et a établi la surjectivité des opérateurs différentiels partiels en utilisant le foncteur Proj_1. Aussi, d'autres résultats sont donnés pour les opérateurs différentiels partiels par Domanski-Vogt dans [3] et [4] et des applications aux équations aux dérivées partielles et à l'analyse fonctionelle ont été données par D. Vogt [14] et J. Wengenroth [20]. En particulier, Vogt [14] a trouvé un critère sur l'annulation du foncteur $\mathrm{Ext}_1(X, Y)$ et Domanski-Vogt [3, 4] ont généralisé le critère d'éclissage (i.e. splitness en anglais) pour les équations différentielles.

Aussi, notons que L. Hörmander utilise une version du Lemme de Mittag-Lefler dans son livre ([7], p. 44) dans la remarque après le Corollaire 10.6.10. Aussi, le Lemme de Mittag-Leffler s'applique aux espaces de Fréchet i.e. espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables et complets (voir Wengenroth [20], page 23).

Notons enfin que nous pouvons montrer sans difficultés que dans une catégorie abélienne si la somme directe générale existe, alors la somme directe générale est un foncteur exact si la somme directe dénombrable est exacte. De même, si le produit direct général existe et le produit direct dénombrable est un foncteur exact alors le produit direct général est aussi un foncteur exact.

Dans [6], il a été établi que la limite inductive est un foncteur exact sur la catégorie des espaces de Fréchet **Fré**. L'objectif de ce papier est d'établir un "Lemme de Mittag-Leffler" concernant l'exactitude du foncteur "limite projective" sur la catégorie abélienne **qFré**. Nous commençerons par donner un contre-exemple montrant que la limite projective est un foncteur qui n'est pas toujours exact à droite sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. Ensuite, nous montrerons que si $(E''_n, \varphi''_{n-1,n})$ et $(E_n, \varphi_{n-1,n})$ sont des systèmes projectifs d'espaces de Fréchet tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n\colon\ E''_n \longrightarrow E_n$ est une application linéaire continue injective (i.e. $E_n \big| E''_n$ est un quotient d'espaces de Fréchet) et les applications linéaires $\varphi_{n-1,n}\colon\ E_n \longrightarrow E_{n-1}$ et $\varphi''_{n-1,n}\colon\ E''_n \longrightarrow E''_{n-1}$ sont continues, et si de plus les applications $\varphi''_{n-1,n}\colon\ E''_n \longrightarrow E''_{n-1}$ ont des images denses telle que $i_{n-1} \circ \varphi''_{n-1,n} = \varphi_{n-1,n} \circ i_n$ pour tout n, alors $\varprojlim_n \left(E_n \big| E''_n\right) \simeq (\varprojlim_n E_n)\big|(\varprojlim_n E''_n)$. Notons que la limite projective $\varprojlim_n \left(E_n \big| E''_n\right)$ existe car la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet **qFré** est abélienne. Enfin, signalons que dans le papier [2] nous donnons une application importante de notre résultat ci-dessus.

2. Préliminaires

Pour établir ce travail, nous aurons besoin de quelques rappels. Notons par **EV** (resp. **Fré**) la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires (resp. des espaces de Fréchet et des applications linéaires continues).

1- Soit (E, τ_E) un espace de Fréchet. Un sous-espace de Fréchet de E est un sous-espace vectoriel F, muni d'une topologie s_F telle que l'injection $(F, s_F) \longrightarrow (E, \tau_E)$ est continue. Un quotient d'espaces de Fréchet $E\big|F$ est un couple (E, F), où E est un espace de Fréchet et F un sous-espace de Fréchet de E. Si $E\big|F$ et $E_1\big|F_1$ sont deux quotients d'espaces de Fréchet, un morphisme strict $u\colon\ E\big|F \longrightarrow E_1\big|F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$ dont la restriction $u_1\Big|_F\colon\ F \longrightarrow F_1$ est continue; le morphisme u est injectif si $u_1^{-1}(F_1) = F$ i.e. si $x \in E$ est tel que $u_1(x) \in F_1$ alors $x \in F$. Le morphisme strict u est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue et surjective $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$.

Notons par $\tilde{\mathbf{q}}$**Fré** la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet et des morphismes stricts. Dans cette catégorie, il existe des pseudo-isomorphismes qui ne sont pas inversibles. En effet, si E est un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E, l'application quotient $\pi\colon\ E \longrightarrow E/F$ induit le pseudo-isomorphisme $E\big|F \longrightarrow (E/F)\big|\{0\}$ qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans $\tilde{\mathbf{q}}$**Fré**. Dans [8], L. Waelbroeck a introduit une catégorie abélienne **qFré** qui a les mêmes objets que $\tilde{\mathbf{q}}$**Fré** et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles c'est-à-dire comme objets les quotients d'espaces de Fréchet et pour morphismes les applications linéaires de la forme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v est un morphisme strict.

Remarquons que la définition de Vasilescu [13] différe de celle de Waelbroeck mais les deux catégories sont isomorphes. Aussi, d'après Vasilescu un morphisme entre deux quotient d'espaces de Fréchet $E\big|F$ et $E_1\big|F_1$ est une application linéaire $u\colon E/F \longrightarrow E_1/F_1$ dont le graphe est aussi un quotient d'espaces de Fréchet c'est-à-dire que les morphismes dans la catégorie **qFré** sont les applications linéaires continues dont le graphe élevé est un sous-espace de Fréchet.

2- Nous avons aussi un foncteur $\sigma\colon$ **q̃Fré** $\longrightarrow$ **EV**, $E\big|F \longrightarrow \sigma(E\big|F) = E/F$, où E/F est le quotient de l'espace vectoriel E par le sous-espace vectoriel F. Si $E\big|F$ et $E_1\big|F_1$ sont deux quotients d'espaces de Fréchet et $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$, $u_2\colon\ E \longrightarrow E_1$ deux applications linéaires continues qui induisent le même morphisme strict $u\colon\ E\big|F \longrightarrow E_1\big|F_1$, alors elles induisent la même application linéaire $\sigma(u)\colon\ \sigma(E\big|F) \longrightarrow \sigma(E_1\big|F_1)$. Si $u\colon\ E\big|F \longrightarrow E_1\big|F_1$ est un pseudo-isomorphisme, l'application $\sigma(u)\colon\ \sigma(E\big|F) \longrightarrow \sigma(E_1\big|F_1)$ est un isomorphisme. Le foncteur exact $\sigma\colon$ **q̃Fré** $\longrightarrow$ **EV** se prolonge en un foncteur exact $\sigma\colon$ **qFré** $\longrightarrow$ **EV**. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [18].

3- Enfin, donnons la définition de la limite projective dans la catégorie **qFré**. Soit $(I, \leqslant)$ un système dirigé. Soit $\big(E_i\big|F_i\big)_{i\in I}$ un système d'objets de **qFré** et pour tout $i < j$, soit $u_{ij}\colon\ E_j\big|F_j \longrightarrow E_i\big|F_i$ un morphisme. Supposons aussi que lorsque $i < j < k$, on a $u_{ik} = u_{ij} \circ u_{jk}$. Alors $\big(E_i\big|F_i, u_{ij}\big)$ est un système projectif dans **qFré**.

Un système projectif $\big(E_i\big|F_i, u_{ij}\big)$ de **qFré** admet une limite projective s'il existe un objet $\varprojlim_i \big(E_i\big|F_i\big)$ de la catégorie **qFré** et un système de morphismes $u_i\colon\ \varprojlim_i \big(E_i\big|F_i\big) \longrightarrow E_i\big|F_i$ tels que pour tout $i < j$, on a $u_i = u_{ij} \circ u_j$. Et si $E\big|F$ est un autre objet de **qFré** et si on a un système de morphismes $v_i\colon\ E\big|F \longrightarrow E_i\big|F_i$ tel que pour tout $i < j$, $v_i = u_{ij} \circ v_j$, alors il existe un morphisme unique $v\colon\ E\big|F \longrightarrow \varprojlim_i \big(E_i\big|F_i\big)$ tel que pour tout i, on a $v_i = u_i \circ v$.

3. Le résultat principal

Commençons par un exemple qui montre que la limite projective est un foncteur qui n'est pas toujours exact à droite sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet.

Exemple 3.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\ell_{2,n} = \{(x_n) \in \ell_2\colon\ x_o = \ldots = x_{n-1} = 0\}\,,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \ell_{2,n} \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

où $\ell_{2,n} \longrightarrow \ell_2$ est l'application l'inclusion et $\ell_2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est l'application quotient i.e. $\ell_2 \longrightarrow \ell_2/\ell_{2,n} \simeq \mathbb{C}^n$. Nous avons aussi une application inclusion $\ell_{2,n} \longrightarrow \ell_{2,n-1}$ et l'application $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ est la projection canonique appliquant $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. De cette manière, nous avons un système projectif des suites injectives exactes suivantes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ell_{2,n} & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ell_{2,n-1} & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ell_{2,0} & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On sait aisément que $\varprojlim_n \ell_{2,n} \simeq \{0\}$, que $\varprojlim_n \ell_2 = \ell_2$ et $\varprojlim_n \mathbb{C}^n \simeq C^{\mathbb{N}}$. Donc en passant à la limite projective, nous obtenons la suite

$$0 \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow C^{\mathbb{N}}$$

qui est exacte seulement à gauche. Ceci montre que

$$\varprojlim_n (\ell_2 \big| \ell_{2,n}) \neq (\varprojlim_n \ell_2) \big| (\varprojlim_n \ell_{2,n}).$$

Par conséquent, la limite projective est un foncteur exact à gauche qui n'est pas en générale exact à droite sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet **qFré**.

N'empêche que nous avons un résultat où la limite projective est une opération exacte sur la catégorie **Fré**. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$0 \longrightarrow E''_n \longrightarrow E_n \longrightarrow E'_n \longrightarrow 0$$

est exacte, où $(E''_n, \varphi''_{n-1,n})$, $(E_n, \varphi_{n-1,n})$ et $(E'_n, \varphi'_{n-1,n})$ sont des systèmes projectifs d'espaces de Fréchet. Si de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application linéaire continue $\varphi''_{n-1,n} \colon E''_n \longrightarrow E''_{n-1}$ a une image dense, alors la suite des limites projectives

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n E''_n \longrightarrow \varprojlim_n E_n \longrightarrow \varprojlim_n E'_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

Nous avons signalé que le Lemme de Mittag-Leffler est contenu dans la théorie du foncteur Proj_1 car les conditions du Lemme implique que $\mathrm{Proj}_1 = 0$. Mais cette condition suffisante du Lemme de Mittag-Leffler n'est pas nécessaire car elle est plus forte que le critère qui annule Proj_1. Cependant, dans la théorie de Palmadov on n'a pas besoin de supposer que les epaces E_n et E'_n soient des espaces Fréchet. En effet, cette théorie donne aussi un critère dans la catégorie des espaces DF.

Nous avons aussi remarqué que le nom de la procédure de Mittag-Leffler apparait dans le livre de L. Hörmander ([7], p. 44) dans la remarque après le Corollaire 10.6.10. En effet, il utilise un cas particulier de ce est qui énoncé ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons une injection

$$0 \longrightarrow E''_n \longrightarrow E_n$$

où les espaces E_n et E''_n sont de Fréchet. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application linéaire continue $\varphi''_{n-1,n} \colon E''_n \longrightarrow E''_{n-1}$ a une image dense, alors

$$\varprojlim_n (E_n/E''_n) \simeq (\varprojlim_n E_n)/(\varprojlim_n E''_n).$$

Théorème 3.2. *Soient* $(E''_n, \varphi''_{n-1,n})$ *et* $(E_n, \varphi_{n-1,n})$ *des systèmes projectifs d'espaces de Fréchet. Supposons que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $i_n \colon E''_n \longrightarrow E_n$ *est une application linéaire continue injective et les applications* $\varphi''_{n-1,n} \colon E''_n \longrightarrow E''_{n-1}$ *ont des images denses telles que* $i_{n-1} \circ \varphi''_{n-1,n} = \varphi_{n-1,n} \circ i_n$. *Alors* $\varprojlim_n \left(E_n \middle| E''_n\right) \simeq (\varprojlim_n E_n)\big|(\varprojlim_n E''_n)$.

Preuve. Nous aurons besoin des suites fondamentales de voisinages de l'origine dans les espaces de Fréchet E_n et E''_n. Nous les appelons $(U_{n,r})$ et $\left(U''_{n,r}\right)$ respectivement. Nous supposons que

$$i_n(U''_{n,r}) \subseteq U_{n,r},\ \varphi_{n-1,n}\,(U_{n,r}) \subset U_{n-1,r}$$

et

$$\varphi''_{n-1,n}(U''_{n,r}) \subseteq U''_{n-1,r}$$

Il est possible de trouver de tels systèmes fondamentales de voisinages dans E_n et dans E''_n. Nous considérons une suite fondamentale de voisinages de l'origine $(U_{o,r})$ dans E_o. On construit ensuite une suite fondamentale de voisinages $\left(U''_{o,r}\right)$ de l'origine dans E''_o telle que

$$i_o(U''_{o,r}) \subseteq U_{o,r}$$

Puis par récurrence, nous trouvons $(U_{n,r})$ et ensuite $\left(U''_{n,r}\right)$ après avoir trouvé $(U_{n-1,r})$ et $\left(U''_{n-1,r}\right)$.

Nous définissons aussi les applications $(\varphi_{k,n})$ et $(\varphi''_{k,n})$ si $k \leqslant n$, en disant que $\varphi_{n,n}$ et $\varphi''_{n,n}$ sont les applications identiques et si $k \leqslant n$,

$$\varphi_{k,n} = \varphi_{k,k+1} \circ \cdots\cdots \circ \varphi_{n-1,n}$$

et

$$\varphi''_{k,n} = \varphi''_{k,k+1} \circ \cdots\cdots \circ \varphi''_{n-1,n}$$

Nous considérons aussi les applications $\varphi'_{n-1,n} \colon \sigma(E_n | E''_n) \longrightarrow \sigma(E_{n-1} | E''_{n-1})$ telles que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\varphi_{n-1,n}"] & \sigma(E_n | E''_n) \arrow[d, "\varphi'_{n-1,n}"] \\
E_{n-1} \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \sigma(E_{n-1} | E''_{n-1})
\end{tikzcd}$$

où π_n et π_{n-1} sont les applications quotients.

Maintenant, considérons une suite $(x'_n)_n$ d'éléments de $\varprojlim_n \sigma(E_n | E''_n)$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \varphi'_{n-1,n}(x'_n) = x'_{n-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous trouvons $\xi_n \in x'_n \in \sigma(E_n | E''_n)$. Nous n'avons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n-1,n}(\xi_n) = \xi'_{n-1}$. Nous rectifions $(\xi_n)_n$ en $(x_n)_n$ ayant cette propriété. Nous commençons par ξ_1, nous voyons que

$$\varphi_{o,1}(\xi_1) = \xi_o$$

appartient à la classe d'équivalence nulle dans $\sigma(E_0 | E''_0)$. Un élément $\eta_o \in E''_o$ existe tel que

$$\varphi_{o,1}(\xi_1) - \xi_o - i_o(\eta_o) = 0.$$

L'application $E''_1 \longrightarrow E''_o$ a une image dense. Nous choisissons $\eta'_1 \in E''_1$ tel que

$$\varphi''_{o,1}(\eta'_1) - \eta_o \in 2^{-1} U''_{o,1}.$$

On voit que $\xi_1 - i_1(\eta'_1) = x_{1,1}$ est un nouveau élément de la classe d'équivalence de x'_1, et

$$\varphi_{o,1}\,(x_{1,1}) - x_{o,o} \in 2^{-1} U_{o,1}.$$

Par récurrence, nous partons de ξ_n, élément de la classe d'équivalence x'_n. Nous avons déjà construit $x_{n-1,n-1} \in x'_{n-1}$. Nous trouvons $\eta_{n-1} \in E''_{n-1}$ tel que

$$\varphi_{n-1,n}(\xi_n) - x_{n-1,n-1} = i_{n-1}(\eta_{n-1}).$$

aussi, nous trouvons $\eta'_n \in E''_n$ tel que

$$\eta_{n-1} - \varphi''_{n-1,n}(\eta'_n) \in 2^{-\ n+1} U''_{n-1,n-1}$$

puis nous voyons que $\xi_n - i_n(\eta'_n) \in x'_n$. Nous posons $x_{n,n} = \xi_n - i_n(\eta'_n)$. Nous voyons que

$$\varphi_{n-1,\ n}\,(x_{n,n}) - x_{n-1,n-1} \in 2^{-n+1} U_{n-1,n-1}$$

Si $k \leqslant n$, nous posons $x_{k,n} \in E_k$ avec $\varphi_{k,n}(x_{n,n}) = x_{k,n}$. On voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{k,n})_{n \geqslant k}$ est une suite de Cauchy dans E_k, donc elle est convergente. Soit $\overline{x}_k = \lim\limits_n x_{k,n}$. On voit que $\varphi_{k-1,k}\,(\overline{x_k}) = \overline{x}_{k-1}$. On peut encore montrer que la suite $(\overline{x}_k)_k$ appartient aussi à $\varprojlim_n E_k$ et relève $(x'_n)_n$.

En fait, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{k,n} - x_{k,k})$ est l'image d'une suite de Cauchy dans E''_k, elle est donc convergente, et par suite $\overline{x}_k - \xi_k \in i_k(E''_k)$. Ce qui montre le théorème. $\square$

References

[1] *B. Aqzzouz and R. Nouira*: La catégorie abélienne des quotients de type $\mathcal{LF}$. Czech. Math. J. *57* (2007), 183–190.

[2] *B. Aqzzouz*: Une application du Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. To appear in Math. Bohem. 2008.

[3] *P. Domanski and D. Vogt*: A splitting theorem for the space of smooth functions. J. Funct. Anal. *153* (1998), 203–248.

[4] *P. Domanski and D. Vogt*: Distributional complexes split for positive dimensions. J. Reine Angew. Math. *522* (2000), 63–79.

[5] *L. Ehrenpreis*: Fourier analysis in several complex variables. Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII, Wiley-Interscience Publishers A Division of John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1970.

[6] *A. Grothendieck*: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. (1966).

[7] *L. Hörmander*: The analysis of partial differential operators II. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] *V. P. Palamodov*: The projective limit functor in the category of topological linear spaces. Mat. Sb. (N.S.) 75 *117* (1968), 567–603. (In Russian.)

[9] *V. P. Palamodov*: Linear differential operators with constant coefficients. Translated from the Russian by A. A. Brown. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 168 Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[10] *V. P. Palamodov*: Homological methods in the theory of locally convex spaces. Uspehi Mat. Nauk 26 *1* (1971), 3–65. (In Russian.)

[11] *V. P. Palamodov*: On a Stein manifold the Dolbeault complex splits in positive dimensions. Mat. Sb. (N.S.) *88* (1972), 287–315. (In Russian.)

[12] *V. P. Palamodov*: A criterion for splitness of differential complexes with constant coefficients. Geometric and Algebraic aspects in Several Complex Variables, AMS, 1991, pp. 265-291.

[13] *F. H. Vasilescu*: Spectral theory in quotient Fréchet spaces I. Revue Roumaine de Math. Pures et Appl. *32* (1987), 561–579.

[14] *F. H. Vasilescu*: Spectral theory in quotient Fréchet spaces II. J. Operator theory *21* (1989), 145–202.
[15] *D. Vogt*: On the functors $\mathrm{Ext}_1(E, F)$ for Fréchet spaces. Studia Math. *85* (1987), 163–197.
[16] *L. Waelbroeck*: Quotient Banach spaces. Banach Center Publ. Warsaw (1982), 553–562 and 563–571.
[17] *L. Waelbroeck*: The category of quotient bornological spaces. J.A. Barroso (ed.), Aspects of Mathematics and its Applications, Elsevier Sciences Publishers B.V. (1986), 873–894.
[18] *L. Waelbroeck*: Quotient Fréchet spaces. Revue Roumaine de Math. Pures et Appl. 34, n. 2 (1989), 171–179.
[19] *L. Waelbroeck*: Holomorphic Functions taking their values in a quotient bornological space. Linear operators in function spaces, 12th Int. Conf. Oper. Theory, Timisoara (Rom.) 1988, Oper. Theory, Adv. Appl. *43* (1990), 323–335.
[20] *J. Wengenroth*: Derived Functors in Functional Analysis. Lecture Notes in Math. 1810. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Author's address: Belmesnaoui Aqzzouz, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Complexe, B.P. 133, Kénitra, Morocco, e-mail: baqzzouz@hotmail.com.